Całka nieoznaczona - całkowanie funkcji wymiernych

Bardzo ważnym typem całek są całki funkcji wymiernych, tj. całki postaci $\int \frac{U(x)}{V(x)}dx$, gdzie $U(x)$ i $V(x)$ są wielomianami. Omówienie sposobu postępowania z tego typu całkami zostanie poprzedzone podaniem teorii dotyczącej samych funkcji wymiernych niezbędnej przy całkowaniu tychże funkcji.

Definicja. Funkcję wymierną $\frac{U(x)}{V(x)}$ nazywamy *właściwą*, gdy stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z *funkcją wymierną niewłaściwą*.

Twierdzenie. Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

Zatem dla funkcji wymiernej niewłaściwej postaci $\frac{U(x)}{V(x)}$ możemy zapisać

$$\frac{U(x)}{V(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{V(x)} \ ,$$

gdzie:
$Q(x)$ – wynik dzielenia wielomianu $U(x)$ przez $V(x)$,
$R(x)$ – reszta z dzielenia wielomianu $U(x)$ przez $V(x)$.

Definicja.

1. Funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x+a)^n} \ ,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, A \in \mathbb{R}$, nazywamy ułamkiem prostym pierwszego rodzaju.

2. Funkcję wymierną postaci

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} \ ,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $p, q, P, Q \in \mathbb{R}$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$, nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

Twierdzenie. Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci sumy ułamków prostych.

Aby wyznaczyć rozkład, o którym mowa w powyższym twierdzeniu możemy skorzystać z następującego schematu:

1. Rozkładamy mianownik na iloczyn czynników nierozkładalnych postaci $(x+a)^n$ oraz $(x^2+px+q)^n$.
2. Określamy liczbę ułamków prostych sumując potęgi kolejnych czynników.
3. Dla każdego czynnika $(x+a)^n$ zapisujemy w rozkładzie sumę n ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+...+\frac{A_n}{(x+a)^n}\ .$$

4. Dla każdego czynnika $(x^2+px+q)^n$ (przy $\Delta<0$) zapisujemy w rozkładzie sumę n ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{P_nx+Q_n}{(x^2+px+q)^n}\,.$$

Zilustrujmy podany schemat kilkoma przykładami (przy założeniu, że mianownik został już rozłożony na iloczyn czynników nierozkładalnych):

$$\frac{3x+7}{(x-2)^4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^4}\,,$$

$$\frac{x^2-5}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}\,,$$

$$\frac{1}{(x-3)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\ ,$$

$$\frac{3x^2-2x+5}{(x-5)^3(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{(x-5)^2}+\frac{C}{(x-5)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}\,.$$

Nieznane współczynniki z powyższych rozkładów wyznaczamy mnożąc każdą równość przez mianownik rozkładanego ułamka, a następnie przyrównujemy współczynniki przy odpowiadających sobie potęgach zmiennej x oraz wyrazy wolne. Rozwiązujemy powstały układ równań.

Przejdziemy teraz do całkowania funkcji wymiernych. Na początek zajmiemy się bardzo ważnym przypadkiem tego typu całek, mianowicie całkami postaci:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx\,.$$

Aby obliczyć tego typu całkę można posłużyć się następującym algorytmem:

I. Sprawdzamy, czy licznik nie jest czasem krotnością pochodnej mianownika, jeżeli jest, to całkujemy przez podstawienie – w miejsce mianownika podstawiamy pomocniczą zmienną np. t. W zapisie ogólnym wyglądałoby to następująco:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx=\left|\begin{matrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{matrix}\right|=k\int\frac{dt}{t}=$$

$$=k\ln|t|+C=k\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C\,.$$

Jeżeli podany warunek nie jest spełniony, przechodzimy do punktu II.

II. Obliczamy wyróżnik mianownika i w zależności od jego znaku postępujemy w sposób następujący:

1. Jeżeli $\Delta>0$, to wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2 mianownika i zapisujemy $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, a następnie funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych:

$$\frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}.$$

Po wyznaczeniu współczynników A i B rozbijamy wyjściową całkę na sumę dwóch całek, z których każdą obliczamy przez podstawienie, ewentualnie stosujemy wzór:

(19) $$\int\frac{dx}{x+k}=\ln|x+k|+C.$$

2. Jeżeli $\Delta=0$, to zapisujemy $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ (gdzie x_0 jest pierwiastkiem mianownika) i w zależności od postaci licznika postępujemy następująco:

   a) jeżeli $m=0$, to całkujemy przez podstawienie:

$$\int\frac{n}{a(x-x_0)^2}dx=\left|\begin{array}{c}x-x_0=t\\ dx=dt\end{array}\right|=\frac{n}{a}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{n}{a}\int t^{-2}dt=$$

$$=\frac{n}{a}(-1t^{-1})+C=-\frac{n}{at}+C=-\frac{n}{a(x-x_0)}+C,$$

   b) jeżeli $m\neq 0$, to rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2},$$

   skąd

$$\int\frac{mx+n}{a(x-x_0)^2}dx=\int\frac{A}{x-x_0}dx+\int\frac{B}{(x-x_0)^2}dx.$$

   Obie otrzymane całki można obliczyć przez podstawienie $x-x_0=t$. Zauważmy, że do pierwszej całki można zastosować gotowy wzór (2.19), natomiast do drugiej – sposób obliczeń przedstawiony w podpunkcie 2a.

3. Jeżeli $\Delta<0$, to w zależności od postaci licznika postępujemy następująco:

   a) jeżeli $m=0$, to mianownik zapisujemy w postaci kanonicznej

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[(x+r)^2+k\right],$$

   a następnie otrzymaną całkę całkujemy przez podstawienie: $x+r=\sqrt{k}\,t$, ewentualnie (co krócej) do jej obliczenia stosujemy często wykorzystywany gotowy wzór:

   (20) $$\int\frac{dx}{x^2+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{k}}+C,\ \text{dla } k>0$$

   b) jeżeli $m\neq 0$, to licznik funkcji podcałkowej przekształcamy do postaci

$$mx+n=\alpha(2ax+b)+\beta,$$

   gdzie $2ax+b$ jest pochodną mianownika, a następnie wyjściową całkę rozbijamy na sumę dwóch całek, które zostały już wcześniej opisane w niniejszym algorytmie:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c}dx=\alpha\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\beta\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Sposób postępowania z pierwszą z tych całek został podany w punkcie I, natomiast drugą całkę obliczamy zgodnie z metodą podaną w podpunkcie 3a.

Uwaga. Powyższy algorytm w graficznej i skróconej postaci można znaleźć w dodatkowym dokumencie: "Schemat obliczania całek wymiernych".

Podany algorytm zostanie zilustrowany kilkoma przykładami.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int \frac{4x-6}{x^2-3x+1}dx$, b) $\int \frac{2x-5}{x^2-3x+2}dx$, c) $\int \frac{24x-31}{x^2-4x+4}dx$,

e) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$, f) $\int \frac{x+3}{x^2-2x+10}dx$.

Rozwiązanie.

a) Ponieważ $4x-6=2(2x-3)$, gdzie $2x-3$ jest pochodną mianownika, mamy zatem do czynienia z całką opisaną w punkcie I. Całkujemy przez podstawienie

$$\int \frac{4x-6}{x^2-3x+1}dx = 2\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx = \left| \begin{matrix} x^2-3x+1=t \\ (2x-3)dx=dt \end{matrix} \right| = 2\int \frac{1}{t}dt =$$

$$= 2\ln|t| + C = 2\ln\left|x^2-3x+1\right| + C,$$

b) Łatwo stwierdzić, że licznik nie jest krotnością pochodnej mianownika, a ponieważ $\Delta=1$, więc mamy do czynienia z przypadkiem II2. Rozłożymy najpierw funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$x_1=1,\quad x_2=2$, to $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ i dalej

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad / \cdot (x-1)(x-2)$$

$$2x-5 = A(x-2) + B(x-1),$$

$$2x-5 = (A+B)x - 2A - B .$$

Z warunku równości wielomianów mamy:

$$\begin{cases} 2 = \quad A+B \\ -5 = -2A-B \end{cases}$$

$$-3 = -A \qquad \Rightarrow A=3, \quad B=-1.$$

Możemy zatem zapisać

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2} \quad .$$

Ostatecznie otrzymujemy (stosując wzór (2.19)):

$$\int \frac{2x-5}{x^2-3x+2}dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx = 3\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= 3\ln|x-1| - \ln|x-2| + C .$$

c) Ponieważ $\Delta = 0$ oraz $m = 24 \neq 0$, zatem mamy do czynienia z przypadkiem 2b w punkcie II. Wyznaczamy pierwiastek mianownika $x_0 = 2$, a stąd $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Dalej rozkładamy funkcję podcałkową na sumę dwóch ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$\frac{24x-31}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \quad / \cdot (x-2)^2,$$

$$24x - 31 = A(x-2) + B,$$

$$24x - 31 = Ax - 2A + B, \text{ stąd}$$

$$\begin{cases} A = 24 \\ -2A + B = -31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 24 \\ B = 17 \end{cases}.$$

Nasz rozkład przedstawia się następująco

$$\frac{24x-31}{(x-2)^2} = \frac{24}{x-2} + \frac{17}{(x-2)^2}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\int \frac{24x-31}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{24x-31}{(x-2)^2}\,dx = 24\int \frac{dx}{x-2} + 17\int \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Do pierwszej całki stosujemy wzór (2.19), a drugą obliczamy przez podstawienie (ewentualnie stosujemy wzór wyprowadzony w punkcie 2a podanego algorytmu):

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \left| \begin{matrix} x-2=t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{x-2} + C.$$

Ostatecznie możemy zapisać:

$$\int \frac{24x-31}{x^2-4x+4}dx = 24 \ln|x-2| - \frac{17}{x-2} + C.$$

e) Łatwo stwierdzić, że tym razem mamy do czynienia z całką typu 3a ($\Delta = -36, m = 0$). Zapisujemy mianownik w postaci kanonicznej

$$x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4,$$

a następnie całkujemy przez podstawienie oraz stosujemy wzór (2.20)

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \left| \begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

Uwaga. Powyższą całkę można było również sprowadzić do całki podstawowej poprzez podstawienie $x+3=2t$, gdzie 2 jest pierwiastkiem wyrazu wolnego (czyli w tym przypadku 4) w kanonicznym zapisie mianownika:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \left| \begin{matrix} x+3=2t \\ dx=2dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C\,.$$

f) Ponieważ wyróżnik mianownika $\Delta = -36$, zatem postępujemy zgodnie z metodą podaną w punkcie 3b powyższego algorytmu

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+10}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx}_{I_1} +$$

$$+4\underbrace{\int \frac{dx}{x^2-2x+10}}_{I_2}\,.$$

Całkę I_1 obliczamy przez podstawienie (przypadek I), a z całką I_2 postępujemy podobnie, jak z całką z przykładu e (przypadek II3a):

$$I_1 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx = \left| \begin{matrix} x^2-2x+10 = t \\ (2x-2)dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|x^2-2x+10\right| + C\,,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2-2x+10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C\,.$$

Przy obliczaniu całki I_2 (dla skrócenia zapisu) skorzystano ze wzoru (2.20) podstawiając od razu $x-1$ w miejsce x.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+10}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+10\right| + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C\,.$$

Podamy teraz kilka przykładów całek funkcji wymiernych, do których nie można (a przynajmniej nie w sposób bezpośredni) zastosować podanego algorytmu.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+8}{x^2-4}dx$, b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+4x+9}{x^4+3x^2-4}dx$.

Rozwiązanie.

a) Zauważmy na wstępie, że funkcja podcałkowa nie jest funkcją wymierną właściwą. Zgodnie z jednym z wcześniejszych twierdzeń zapisujemy najpierw naszą funkcję w postaci sumy wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej. W tym celu wykonujemy dzielenie wielomianów

$$(x^3-2x+8):(x^2-4) = x \leftarrow Q(x)$$

$$\underline{-x^3+4x}$$

$$2x+8 \leftarrow R(x)\,.$$

Możemy więc zapisać:

$$\frac{x^3-2x+8}{x^2-4} = x + \frac{2x+8}{x^2-4}\,.$$

Stąd

$$\int \frac{x^3-2x+8}{x^2-4}dx=\int xdx+2\underbrace{\int \frac{x+4}{x^2-4}dx}_{I_1}.$$

Obliczmy oddzielnie całkę I_1. Jest to już całka postaci $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$, zatem możemy zastosować podany algorytm. Mamy do czynienia z przypadkiem II1. Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x+4}{x^2-4}=\frac{x+4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \quad /\cdot(x-2)(x+2),$$

$$x+4=A(x+2)+B(x-2),$$

$$x+4=Ax+2A+Bx-2B,$$

$$x+4=(A+B)x+2A-2B,$$

Przyrównując współczynniki przy x oraz wyrazy wolne z obu stron równości otrzymamy:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=4 \end{cases}, \text{ a stąd } \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Zatem

$$I_1=\int \frac{x+4}{x^2-4}dx=\int \frac{x+4}{(x-2)(x+2)}dx=\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C.$$

Ostatecznie

$$\int \frac{x^3-2x+8}{x^2-4}dx=\int xdx+2\underbrace{\int \frac{x+4}{x^2-4}dx}_{I_1}=\frac{1}{2}x^2+3\ln|x-2|-\ln|x+2|+C.$$

b) Będziemy rozkładać funkcję podcałkową (właściwą) na sumę ułamków prostych. W tym celu zapiszemy najpierw mianownik w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych

$$\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx=\int \frac{3x^2-5x+2}{x^2(x-2)+3(x-2)}dx=\int \frac{3x^2-5x+2}{(x-2)(x^2+3)}dx.$$

Zgodnie z podanym schematem rozkładu funkcji wymiernej właściwej na sumę ułamków prostych zapisujemy:

$$\frac{3x^2-5x+2}{(x-2)(x^2+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+3} \quad /\cdot(x-2)(x^2+3),$$

$$3x^2-5x+2=A(x^2+3)+(Bx+C)(x-2),$$

$$3x^2-5x+2=Ax^2+3A+Bx^2-2Bx+Cx-2C,$$

$$3x^2-5x+2=(A+B)x^2+(-2B+C)x+3A-2C.$$

Na podstawie ostatniej równości zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2B+C=-5 \\ 3A-2C=2 \end{cases}, \text{ skąd po jego rozwiązaniu otrzymamy } \begin{cases} A=\frac{4}{7} \\ B=\frac{17}{7} \\ C=-\frac{1}{7} \end{cases}.$$

Szukany rozkład ma zatem postać

$$\frac{3x^2-5x+2}{(x-2)(x^2+3)}=\frac{\frac{4}{7}}{x-2}+\frac{\frac{17}{7}x-\frac{1}{7}}{x^2+3}.$$

Możemy zapisać

$$\int\frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx=\int\frac{3x^2-5x+2}{(x-2)(x^2+3)}dx=$$

$$=\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{7}\underbrace{\int\frac{17x-1}{x^2+3}dx}_{I_1}.$$

Do pierwszej całki można zastosować gotowy wzór (19), natomiast przy obliczaniu drugiej całki można posłużyć się podanym wcześniej algorytmem (przypadek 3b)

$$I_1=\int\frac{17x-1}{x^2+3}dx=\int\frac{\frac{17}{2}\cdot 2x-1}{x^2+3}dx=\frac{17}{2}\int\frac{2x}{x^2+3}dx-\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=\frac{17}{2}\ln\left|x^2+3\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=\frac{17}{2}\ln\left|x^2+3\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{3}+C.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx=\frac{4}{7}\ln|x-2|+\frac{17}{14}\ln\left|x^2+3\right|-\frac{\sqrt{3}}{21}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{3}+C.$$

c) Najpierw rozkładamy mianownik na iloczyn czynników nierozkładalnych

$$x^4+3x^2-4=\left|\begin{matrix}\text{podstawiamy}\\ x^2=t\end{matrix}\right|=t^2+3t-4=\left|\begin{matrix}\Delta=25\\ t_1=-4,\ t_2=1\end{matrix}\right|=$$

$$=(t+4)(t-1)=(x^2+4)(x^2-1)=(x^2+4)(x-1)(x+1).$$

Wyznaczamy rozkład funkcji podcałkowej na sumę ułamków prostych

$$\frac{x^3+6x^2+4x+9}{x^4+3x^2-4}=\frac{x^3+6x^2+4x+9}{(x^2+4)(x-1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1},$$

$$x^3+6x^2+4x+9=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+4)(x+1)+D(x^2+4)(x-1),$$

$$x^3+6x^2+4x+9=(A+C+D)x^3+(B+C-D)x^2+(-A+4C+4D)x-B+4C-4D.$$

Przyrównując odpowiednie współczynniki dostajemy

$$\begin{cases} A+C+D=1 \\ B+C-D=6 \\ -A+4C+4D=4 \\ -B+4C-4D=9 \end{cases}, \quad \text{a stąd} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=3 \\ C=2 \\ D=-1 \end{cases}.$$

Możemy zatem zapisać

$$\frac{x^3+6x^2+4x+9}{x^4+3x^2-4}=\frac{3}{x^2+4}+\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}.$$

Stosując odpowiednie wzory otrzymujemy

$$\int \frac{x^3+6x^2+4x+9}{x^4+3x^2-4}dx=3\int \frac{dx}{x^2+4}+2\int \frac{dx}{x-1}-\int \frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$$

Uwaga. Podanie wyżej przykłady całek funkcji wymiernych nie wyczerpują wszystkich możliwości, z jakimi możemy mieć do czynienia. Pominięte tu zostały całki postaci (oraz takie, które można do nich sprowadzić):

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx,$$

gdzie $n=2,3,...$ oraz $p,q,P,Q\in\mathbb{R}$, przy czym $\Delta=p^2-4q<0$.

Całki tego typu są dosyć uciążliwe w obliczaniu i nie będziemy się nimi zajmować.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć całki:

64. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}dx$,

65. $\int \frac{x-10}{x^2-5x+4}dx$,

66. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$,

67. $\int \frac{dx}{1-x^2}$,

68. $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}dx$,

69. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$,

70. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx$,

71. $\int \frac{dx}{x^2-4x+29}$,

72. $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5}dx$,

73. $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8}dx$,

74. $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}dx$,

75. $\int \frac{2x^2+7x+20}{x^2+6x+25}dx$,

76. $\int \frac{x^3}{x^2-2x+10}dx$,

77. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$,

78. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$,

79. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$,

80. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$,

81. $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}dx$,

82. $\int \frac{dx}{1+x^3}$,

83. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$,

84. $\int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}dx$,

85. $\int \frac{4x+4}{x^3-8}dx$,

86. $\int \frac{x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx$,

87. $\int \frac{-5x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$,

88. $\int \frac{x^5+2}{x^3-1}dx$,

89. $\int \frac{x^2-2}{(x-1)^3}\,dx$,

90. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$,

91. $\int \frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch